

Exercice 1 :

- $f(x) = 1$: La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = x + 2$, est une primitive de f .
- $g(x) = \cos x$: La fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \sin(x)$, est une primitive de g .
- $h(x) = \exp(x)$: La fonction H définie sur \mathbb{R} par $H(x) = \exp(x) - 1$, est une primitive de h .
- $i(x) = 2x$: La fonction I définie sur \mathbb{R} par $I(x) = x^2$, est une primitive de i .
- $j(x) = \frac{1}{x}$: La fonction J définie sur $]0, +\infty[$ par $J(x) = \ln(x)$, est une primitive de j .
- $k(x) = 0$: La fonction K définie sur \mathbb{R} par $K(x) = 5$, est une primitive de k .

Exercice 2 :

Fonction	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Non			x			x		x				x
Oui ($n^0...$)	4	4		4	1 : $n=2$		1 : $n=3$		4	5	5	

1. $u(x) = x^3 + x + 2$ 2. $u(x) = \cos(x) + 1$; $f = -\frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ 4. $u(x) = 1 - 2 \sin(x)$; $f = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ 5. $u(x) = \sin(x)$
7. $u(x) = x^2 + 2$; $f = \frac{1}{2} \times u' \times u^3$ 9. $u(x) = \exp(x) + \exp(-x)$ 10. $u(x) = \sqrt{x}$; $f = 2 u' \exp(u)$ 11. $u(x) = \sin(x)$

Exercice 3 :

1. $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$.

Posons : $u(x) = x - 1$. Alors : $u'(x) = 1$. On a donc : $f(x) = 2 \times \frac{2}{(x-1)^2} = 2 \times \frac{u'(x)}{u^2(x)}$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $F(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{u(x)} \right) = -\frac{2}{x-1}$, est une primitive de f .

2. $f(x) = \sin x \cos x$

Posons : $u(x) = \sin(x)$. Alors : $u'(x) = \cos(x)$. On a donc : $f(x) = u(x) \times u'(x) = u^1(x) \times u'(x)$.

La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \frac{u^{1+1}(x)}{1+1} = \frac{\sin^2 x}{2}$, est une primitive de f .

Autre solution :

Posons : $v(x) = \cos(x)$. Alors : $v'(x) = -\sin(x)$.

On a donc : $f(x) = -(-\sin(x)) \times \cos(x) = -v'(x) \times v(x)$.

La fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = -\frac{v^2(x)}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2}$, est une primitive de f .

Remarque :

Les 2 primitives de f ci-dessus diffèrent bien d'une constante.

En effet si on se rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on peut vérifier que : $F(x) - G(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = G(x) + \frac{1}{2}$.

$$3. f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

Posons : $u(x) = \sin(x)$. Alors : $u'(x) = \cos(x)$.

On a donc : $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$. La fonction F définie sur $]0, \pi[$ par : $F(x) = 2 \sqrt{u(x)} = 2\sqrt{\sin x}$, est une primitive de f .

$$4. f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Posons : $u(x) = e^x + 1$. Alors : $u'(x) = e^x$.

On a donc : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) > 0$ pour tout x réel.

La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \ln(u(x)) = \ln(e^x + 1)$, est une primitive de f .

Exercice 4 :

1. Posons : $u(x) = x^2 + 2x + 2$. Alors : $u'(x) = 2x + 2$.

On a donc : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

On en déduit que :

$$A = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \left[\frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} \right]_1^2 = \left[\sqrt{u(x)} \right]_1^2 = \left[\sqrt{x^2 + 2x + 2} \right]_1^2 = \sqrt{10} - \sqrt{5} = \sqrt{5} (\sqrt{2} - 1).$$

2. Posons : $u(x) = x^3$. Alors : $u'(x) = 3x^2$.

On a donc : $f(x) = x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} \times 3x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} \times u'(x) e^{u(x)}$.

On en déduit que :

$$B = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{3} \times u'(x) e^{u(x)} dx = \left[\frac{1}{3} \times e^{u(x)} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{3} \times e^{x^3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (e^{1^3} - e^{0^3}) = \frac{e-1}{3}.$$

3. Posons : $u(x) = e^x + 1$. Alors : $u'(x) = e^x$.

On a donc : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$.

On en déduit que :

$$C = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx = \left[-\frac{1}{u(x)} \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{e^1 + 1} \right) - \left(-\frac{1}{e^0 + 1} \right) = -\frac{1}{e+1} + \frac{1}{2}.$$

4. Posons : $u(x) = 2x - 1$. Alors : $u'(x) = 2$.

On a donc : $f(x) = \frac{3}{2x-1} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{2x-1} = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$.

De plus, pour tout $x \in [1, 3]$, on a : $x > 1$, donc : $2x > 2$, d'où $2x - 1 > 1$ et donc : $u(x) > 0$.

On en déduit donc que :

$$D = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \left[\frac{3}{2} \times \ln(u(x)) \right]_1^3 = \left[\frac{3}{2} \times \ln(2x-1) \right]_1^3 = \frac{3}{2} (\ln(5) - \ln(1)) = \frac{3 \ln(5)}{2}.$$